Exercices et problèmes sur les suites

Le 10/09/08

Problème :

On considère les deux suites $(U_n)_{n\epsilon N^*}$ et $(V_n)_{n\epsilon N^*}$ définies par :

$U_n=\sin(1/n^2)+\sin(2/n^2)+....+\sin(n/n^2)$ $\qquad$ $Vn=(1/n^2)+(2/n^2)++....+(n/n^2)$

1/Montrer que la suite (V_n) converge vers ½

2/
a)Montrer que chacune des trois fonctions suivantes ne prend que des valeurs positives sur l'intervalle [0 ; +∞[.
(Utiliser les variations de chacune des fonctions serait une solution.)

f : x-----> x-sin(x) $\qquad$ g : x-------->-1+(x^2/2)+cos(x) $\qquad$ h : x-------->-x+(x^3/6)+sin(x)

b)Montrer que pour tout n ≥ 1 : $\quad 1^3+2^3+.....+n^3 \leq n^4$

puis déduire du 2/a) l'inégalité suivante : $V_n-(1/6)\times(1/n^2)\leq U_n\leq V_n$ (pour tout entier n différent de zéro.)

c)Montrer que la suite est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°1

Soit la suite $(U_n)_{n\epsilon N}$ définie par : $U_0=0$ et pour tout n ε N $U_{n+1}=\frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1/Calculer U_1 et U_2 puis montrer que pour tout entier naturel non nul $\quad 0<U_n<1$.
2/Montrer que la suite U_n est croissante.

3/Soit la suite $(V_n)_{n\epsilon N}$ définie pour tout entier naturel n par : $V_n=\frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que la suite V_n est une suite géométrique convergente

b) Calculer U_n en fonction de n

c) En déduire que U_n converge puis calculer sa limite.

Exercice 2 :

L'objectif de cet exercice est d'étudier les propriétés et les conditions d'existence de la suite

U_n définie par U_0 et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1-U_n}{2}}$

1/

a) Montrer que la suite U_n existe si et seulement si U_0 ε [-1 ;1].

b) Déterminer U_0 de sorte que la suite U_n soit constante.

2/ Dans la suite on posera $U_0 = sin\alpha_0$ avec $\alpha_0 \in [\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

a) Justifier ce choix .Que devient U_n si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$?

b) Etablir l'égalité pour tout $\alpha \in [\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$

$$\sqrt{\frac{1-\sin(\alpha)}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

c/Etablir que, pour tout n $\in$ N, il existe un unique $\alpha_n \in [\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}]$ / que $U_n = \sin(\alpha_n)$.

Quelle relation y a-t-il entre α_{n+1} et α_n ?

d) On considère la suite (γ_n) de terme général vérifiant $\gamma_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}$

Montrer que cette suite est une suite géométrique et en déduire α_n , U_n en fonction de n et α_0

La suite U_n a-t-elle une limite ? Si oui quelle est cette limite ?